III Encontro de Física e Matemática
"DIVERSIDADE E PRÁTICAS INOVADORAS NO ENSINO DE FÍSICA E MATEMÁTICA"

O TEOREMA DA NÃO ENUMERABILIDADE DOS REAIS: UMA ANÁLISE DA PROVA DIAGONAL DE CANTOR

Grupo Temático: G6

Ruan Carlos da Silva Lunguinho[1], Célia Maria Rufino Franco[2], Jussiê Ubaldo da Silva[3], Wesley Janyel Cunha Silva[4]

RESUMO: O conjunto dos números reais é um dos objetos centrais da matemática, servindo como base para teorias fundamentais da análise, topologia e outras áreas. Dentre as propriedades notáveis de $\mathbb{R}$, está o fato de que ele não é enumerável, ou seja, não existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os números naturais. O objetivo deste trabalho é apresentar e discutir a demonstração desse resultado por meio do clássico Processo Diagonal de Cantor, abordando não apenas os aspectos formais, mas também as ideias intuitivas por trás da prova. Para isso, utiliza-se uma abordagem teórico-conceitual, baseada na obra Análise Real I, com ênfase na clareza e no rigor matemático. A metodologia consiste em detalhar passo a passo a construção da prova por contradição, evidenciando como, a partir de uma suposta enumeração dos reais no intervalo aberto $(0,1)$, é possível construir um número que não pertence à lista, contradizendo a hipótese inicial. Os resultados mostram não só a impossibilidade de enumerar os reais, mas também reforçam a existência de diferentes tamanhos de infinito, destacando a relevância do conceito de cardinalidade. Conclui-se que a demonstração é uma excelente ferramenta didática, pois desafia a intuição inicial dos alunos e contribui significativamente para a compreensão da estrutura dos conjuntos numéricos. O trabalho também destaca o valor pedagógico da prova, sugerindo seu uso no ensino de graduação como forma de promover o pensamento crítico e o encantamento com as sutilezas da matemática.

Palavras-chave: Números Reais. FISMAT. Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis.

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos, desenvolvida no final do século XIX por Georg Cantor, trouxe à luz conceitos revolucionários acerca da natureza do infinito (Santos 2008). Um dos mais marcantes resultados dessa teoria é a constatação de que nem todos os infinitos são do mesmo

[1] Ruan Carlos da Silva Lunguinho (aluno de graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), ruan.carlos@estudante.ufcg.edu.br).
[2] Célia Maria Rufino Franco (Doutora em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), celia.maria@professor.ufcg.edu.br).
[3] Jussiê Ubaldo da Silva (Doutor em Ciências e Engenharia de Materiais, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), jussie.ubaldo@professor.ufcg.edu.br).
[4] Wesley Janyel Cunha Silva (aluno de graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), wesley.janyel@estudante.ufcg.edu.br).

tamanho, ou seja, existem diferentes cardinalidades infinitas. Neste contexto, destaca-se o teorema de que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Essa proposição quebra a intuição de que qualquer conjunto infinito poderia ser posto em correspondência biunívoca com os números naturais $\mathbb{N}$.

A demonstração da não enumerabilidade dos reais — mais especificamente do intervalo aberto $(0,1)$ — utiliza uma técnica engenhosa conhecida como Processo Diagonal de Cantor. Esse método construtivo parte de uma suposta enumeração dos elementos de $(0,1)$ para então construir, dígito a dígito, um número que certamente não está presente na lista, levando a uma contradição lógica. O argumento mostra que não é possível listar todos os números reais entre 0 e 1, mesmo permitindo infinitas casas decimais, evidenciando uma forma mais "densa" de infinito.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma versão detalhada da demonstração desse teorema, evidenciando não apenas a validade matemática do argumento, mas também seu valor conceitual dentro da análise e da teoria dos conjuntos. Além disso, a apresentação desse resultado a alunos de graduação em Matemática pode cumprir um papel importante na formação acadêmica, ao despertar a curiosidade intelectual e provocar uma reflexão mais profunda sobre a natureza do infinito, por meio de um exemplo que desafia a intuição e reforça a beleza da construção matemática. Para isso, utilizamos como base as exposições teóricas encontradas em Análise Real I que serviu de fundamento para a compreensão e estruturação da demonstração aqui apresentada.

2 METODOLOGIA

Este trabalho adota uma abordagem teórico-expositiva, cujo objetivo principal é apresentar, de forma clara e rigorosa, a demonstração da não enumerabilidade do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com ênfase no intervalo aberto $(0,1)$, utilizando o Processo Diagonal de Cantor. A escolha por esse enfoque justifica-se pela natureza do objeto de estudo, que não envolve a aplicação de instrumentos empíricos nem a coleta de dados experimentais, mas sim a exposição detalhada do argumento lógico-matemático.

A metodologia consistiu, primeiramente, em um levantamento bibliográfico sobre o tema, com base em Lima e Maciel (2014), que oferece uma fundamentação sólida e didática sobre os conceitos de números reais, cardinalidade e conjuntos enumeráveis. A partir dessa fonte, foram selecionados os trechos pertinentes à demonstração do teorema, sendo estes analisados, interpretados e reestruturados em linguagem acessível, com o intuito de favorecer a compreensão por parte de estudantes de graduação em Matemática.

Além disso, buscou-se contextualizar historicamente o surgimento da teoria dos conjuntos e o papel de Georg Cantor no desenvolvimento das ideias sobre infinitos não enumeráveis. A construção da demonstração foi detalhada passo a passo, com ênfase na justificativa de cada etapa do raciocínio, e acompanhada de comentários didáticos que destacam sua relevância lógica e conceitual. A fim de tornar a exposição mais clara, foram utilizados recursos de notação matemática padronizada e exemplos ilustrativos, respeitando os princípios de clareza, objetividade e rigor formal.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal resultado apresentado neste trabalho é o Teorema da Não Enumerabilidade dos Reais, cuja demonstração se dá por meio do Processo Diagonal de Cantor. Tal resultado demonstra que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é não enumerável, pois um de seus subconjuntos é não enumerável. De fato, basta provar que o intervalo aberto $(0,1) \subset \mathbb{R}$ é não enumerável.

Demonstração: Assumamos, por contradição, que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $(0,1)$, ou seja, uma enumeração de todos os números reais nesse intervalo. Sob essa suposição, cada número real da lista abaixo pode ser escrito com sua expansão decimal infinita:

$$\begin{array}{c}
x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots a_{1n} \dots \\
x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots a_{2n} \dots \\
x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots a_{3n} \dots \\
x_4 = 0, a_{41}a_{42}a_{43} \dots a_{4n} \dots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

A seguir, constrói-se um número $x = 0, b_1b_2b_3 \dots$ tal que $b_n \neq a_{nn}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A escolha de b_n garante que x difere de x_n pelo menos no n-ésimo dígito decimal, ou seja, x não aparece na lista. Isso contradiz a hipótese de que a lista enumera todos os elementos de $(0,1)$, e, portanto, conclui-se que $(0,1)$ não é enumerável.

A importância desse resultado não se restringe ao seu valor teórico. Ele marca uma mudança de paradigma na história da matemática. A distinção entre conjuntos enumeráveis e não enumeráveis é uma das bases da teoria dos conjuntos, influenciando áreas como análise, topologia e lógica matemática.

Do ponto de vista didático, a demonstração também se mostra extremamente fértil. Ao ser apresentada a estudantes de graduação, ela não só reforça a compreensão dos conceitos de função, conjunto e cardinalidade, como também provoca reflexão sobre os limites da intuição matemática. A construção do número fora da enumeração é simples em sua lógica, mas profundamente contraintuitiva, o que a torna uma excelente ferramenta de ensino e motivação para os estudantes.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema da Não Enumerabilidade dos Reais, demonstrado por Georg Cantor no século XIX, é um dos marcos conceituais mais profundos da matemática moderna. Através de uma construção engenhosa e acessível — o Processo Diagonal — é possível provar que não há uma correspondência entre os números naturais e todos os números reais do intervalo $(0,1)$, revelando, assim, que existem diferentes "tamanhos" de infinito.

Ao longo deste trabalho, foi possível apresentar e discutir essa demonstração com base em Lima e Maciel (2014). Além de oferecer uma base teórica sólida, o estudo do teorema proporciona uma excelente oportunidade para despertar o interesse dos alunos de graduação em temas fundamentais da lógica e da teoria dos conjuntos, ao mesmo tempo em que fortalece a compreensão de conceitos-chave como cardinalidade, funções bijetivas, e representação decimal de números reais.

Mais do que um resultado técnico, o teorema de Cantor nos convida a repensar nossas noções intuitivas de infinito e de contagem. Dessa forma, ele não apenas enriquece a formação acadêmica do estudante, mas também contribui para o desenvolvimento de uma postura crítica e investigativa diante dos objetos matemáticos. Espera-se que esta discussão inspire outros trabalhos que explorem os fundamentos da matemática com o mesmo rigor e curiosidade.

5 REFERÊNCIAS

[1] LIMA, O. A; MACIEL, A. B., **Introdução à Análise Real**. Ed. EDUEPB, Campina Grande -PB, 2008.

[2] SANTOS, Eberth Eleutério dos. **O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática**. 2008. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.