III Encontro de Física e Matemática
"DIVERSIDADE E PRÁTICAS INOVADORAS NO ENSINO DE FÍSICA E MATEMÁTICA"

ENTRE DOIS REAIS: A PRESENÇA GARANTIDA DOS RACIONAIS

Grupo Temático: G6

Wesley Janyel Cunha Silva[1], Célia Maria Rufino Franco[2], Jussiê Ubaldo da Silva [3], Ruan Carlos da Silva Lunguinho[4]

RESUMO: O conjunto dos números racionais foi fundamental para a construção dos números reais, que por sua vez são muito importantes para a matemática. A partir dos estudos de Richard Dedekind sobre a estrutura dos números reais, destaca-se o conceito de densidade, essencial para compreender como os números racionais se distribuem na reta real. A proposição abordada neste estudo reforça esse aspecto, sendo também relevante para a formação conceitual de estudantes da Licenciatura em Matemática. O objetivo principal deste trabalho é apresentar, de forma nítida e minuciosa a demonstração dessa proposição clássica utilizando a propriedade arquimediana dos números reais. Além disso, busca-se discutir e refletir sobre o seu significado matemático. A metodologia utilizada foi teórico-expositiva, com base na pesquisa bibliográfica realizada, especialmente na obra análise real I que oferece um suporte sólido e didático sobre os conceitos de números reais, racionais e suas propriedades. A abordagem escolhida visa tornar acessível a demonstração e o conteúdo para os estudantes de graduação em licenciatura em matemática, como também pretende mostrar o passo a passo da demonstração, mas sem abrir mão de uma linguagem acessível e rigorosa. Os resultados mostraram não apenas que existem infinitos números racionais entre dois números reais, mas também que o conjunto dos números racionais é denso no conjunto dos reais. Conclui-se que, além dos resultados matemáticos apresentados, essa prova da presença dos racionais entre dois reais quaisquer é também um excelente instrumento didático. Ela contribui com o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático dos estudantes da Licenciatura em matemática, ao proporcionar uma compreensão mais profunda da estrutura da reta real.

Palavras-chave: Números racionais. FISMAT. Densidade.

1 INTRODUÇÃO

A reta real é composta por diversos subconjuntos notáveis, entre eles o conjunto dos números racionais que são muito importantes na construção da reta real. Um dos conceitos fundamentais que emergiram a partir dos trabalhos de Richard Dedekind, especialmente em sua

[1] Wesley Janyel Cunha Silva (aluno de graduação em licenciatura de matemática, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), wesley.janyel@estudante.ufcg.edu.br).

[2] Célia Maria Rufino Franco (Doutora em Engenharia de Processos, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), celia.maria@professor.ufcg.edu.br).

[3] Jussiê Ubaldo da Silva (Doutor em Ciências e Engenharia de Materiais, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), jussie.ubaldo@professor.ufcg.edu.br).

[4] Ruan Carlos da Silva Lunguinho (aluno de graduação em licenciatura de matemática, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), ruan.carlos@estudante.ufcg.edu.br).

obra *Essays on the Theory of Numbers* (DEDEKIND,1963), é o de densidade, que revela aspectos profundos sobre a organização dos números na reta real. Nesta perspectiva, destaca-se a proposição que afirma que entre quaisquer dois números reais distintos existem, pelo menos, um número racional. Tal proposição não apenas reforça a presença dos racionais $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$, mas também permite demonstrar sua densidade nesse conjunto.

Para a demonstração da proposição que afirma que, dados dois números $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$, utiliza-se uma propriedade fundamental dos números reais: A Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$. Essa propriedade garante que, para qualquer real a, b com $a > 0$, é possível encontrar um número $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $n \cdot a > b$. A partir dessa ideia e com o auxílio de manipulações algébricas adequadas, é possível construir explicitamente um número racional que pertence ao intervalo aberto (a, b).

Este trabalho tem como objetivo apresentar a demonstração dessa proposição clássica e discutir seu significado matemático. Além de comprovar formalmente a afirmação, busca-se também explorar seu significado conceitual, evidenciando o papel dessa propriedade na estrutura da reta real e no entendimento da densidade do conjunto dos números racionais nos reais. Além do mais, a apresentação dessa demonstração é uma excelente oportunidade, visto que, pode contribuir para a formação dos estudantes da graduação de licenciatura em matemática. Para tal exposição teórica, foi utilizado o material de análise real I que serviu como fundamento para compreensão e análise da demonstração apresentada.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho apresenta uma abordagem teórico-expositiva, do qual o principal objetivo é apresentar, de forma nítida e minuciosa, a demonstração da existência dos números racionais entre dois números reais quaisquer, usando a propriedade arquimediana dos reais para essa demonstração. O foco nesse processo é justificado pelo elemento em estudo, pois não se valida a partir de conhecimentos empíricos, mas sim da exposição da argumentação lógica e puramente matemática.

A metodologia adotada consistiu inicialmente em uma pesquisa bibliográfica sobre o tema, com base na teoria apresentada em Lima e Maciel (2014), que oferece um suporte sólido e didático sobre os conceitos de números reais, racionais e densidade. Logo, foi possível estudar a demonstração da proposição em uma linguagem simples e acessível para estudantes de graduação em matemática.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O resultado apresentado neste trabalho é a proposição que garante a existência de, pelo menos, um racional entre dois números reais distintos.

Proposição: sejam a, b números reais com $a < b$. Então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Demonstração: Inicialmente, vamos separar a demonstração em três casos. Caso (1): $0 < a < b$; Caso (2): $a \leq 0 < b$; Caso (3): $a < b < 0$. Logo, tomando o caso (1) e aplicando a propriedade arquimediana dos reais, temos que, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \cdot (b - a) > 1$, isto implica que $1/k + a < b$. considerando o conjunto $A = \{m \in \mathbb{N};\ m > k \cdot a\}$. Pela propriedade arquimediana segue que $A \neq \emptyset$, pois $m \cdot 1 > k \cdot a$. Usando o princípio da boa ordenação, temos que o conjunto A possui um menor elemento, digamos n_0. Então, observe que $n_0/k > a$ e também como n_0 é o menor elemento de A, o número natural imediatamente anterior a ele, $n_0 - 1 \notin A$. Se $n_0 - 1 \notin A$ então ele não satisfaz a condição $m > k \cdot a$. Portanto, temos que $(n_0 - 1)/k \leq a$. Somando $1/k$ nos em ambos os lados da expressão $n_0/k \leq a + 1/k$. Observe que $a < n_0/k \leq a + 1/k < b$, logo $n_0/k < b$. Portanto, encontramos um $r = n_0/k \in \mathbb{Q}$ que pertence ao intervalo $a < r < b$, logo fica provado esse primeiro caso. O Caso (2) e o Caso (3) são provados usando a mesma linha de raciocínio que foi utilizada para provar o Caso (1).

Esse resultado da proposição apresentado foi absolutamente fundamental e historicamente crucial para construção e a compreensão dos números reais. Ela estabelece uma propriedade essencial que distingue o conjunto dos números reais de outros conjuntos numéricos, ao afirmar a densidade dos racionais nos reais, como também desempenhou um papel importante no desenvolvimento da matemática pura e aplicada.

Na verdade, entre dois reais existe uma infinidade de racionais. Por exemplo, entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e π , existem infinitos racionais. Entre 1 e 2, existem racionais como $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{101}{100}$, etc.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposição da existência dos números racionais entre quaisquer intervalos de números reais distintos é um feito importante e significativo para o desenvolvimento da matemática contemporânea. Através da propriedade arquimediana dos números reais e de manipulação algébrica foi possível demonstrar que é verídico a proposição, ou seja, em qualquer intervalo $a, b \in \mathbb{R}$ sempre há, pelo menos, um $r \in \mathbb{Q}$ entre eles. Pode-se concluir que na reta real, os números racionais estão espalhados de forma tão densa que, por mais que se amplie uma parte da reta, sempre haverá racionais entre quaisquer dois pontos.

No decorrer deste trabalho, foi possível discutir e entender a demonstração da proposição com base em Lima e Maciel (2014). Além do conhecimento adquirido durante todo estudo, é importante ressaltar que essa demonstração instiga os alunos de graduação em Licenciatura em Matemática a entender, por meio de uma linguagem acessível e rigorosa, como também a se interessarem pela área de pesquisa.

Diante do exposto, este trabalho contribui significativamente com o desenvolvimento acadêmico do estudante de licenciatura em matemática e fortalece o pensamento crítico e lógico-matemático diante dos elementos que compõem a estrutura da matemática.

5 REFERÊNCIAS

LIMA, O. A; MACIEL, A. B. **Introdução à Análise Real**. Ed. EDUEPB, Campina Grande -PB, 2008.

DEDEKIND, Richard. ***Essays on the Theory of Numbers***. Trad. W. W. Beman. New York: Dover Publications, 1963.